Prof. Dr. Alfred Toth

Das Zeichen als Relation, Menge und Ereignis

1. Dass das bereits von Peirce als Relation definierte Zeichen gleichzeitig als Menge eingeführt werden kann, geht aus der Definition von Bense (1979, S. 53) hervor:

$ZR = ({}^{1}M{}^{2}O{}^{3}I) = (M, ((M \rightarrow O), (O \rightarrow I)),$

denn damit bekommen wir direkt

$ZR = ({}^{1}M \subset {}^{2}O \subset {}^{3}I) = (M \subset ((M \subset O), (O \subset I)).$

2. Vereinfacht kann man sagen, die mathematische Wahrscheinlichkeitstheorie sei eine Mengentheorie, deren Elemente Ereignisse seien. Etwas abstrakter gesagt: Während der Verzicht auf Potenzmengen (und damit des Ø-Zeichens für die Semiotik!!) entweder zu einer relationalen oder eine wahrscheinlichkeitstheoretischen Semiotik führt, führt der Verzicht sowohl auf Potenzmengen wie auf Ereignisse letztlich zu einer Booleschen Algebra. Dass diese jedoch als Basis für die Semiotik gänzlich ungeeignet ist, sieht man sofort wiederum daran, dass die obige Zeichendefinition Benses mit mehrfach verschachtelten Relata bzw. Teilmengen in einer solchen ohne Paradoxien nicht darstellbar ist. Das Zeichen kann bzw. muss daher mathematisch vierfach eingeführt werden:

- als Relation von Relationen (Partialrelationen) im Sinne einer Relationentheorie (Ordnungstheorie)
- als Elemente (Atome) im Sinne einer Booleschen Algebra
- als Ereignisse im Sinne einer σ-Algebra (Borelscher Mengenkörper)
- als Menge von Teilmengen (Potenzmenge) im Sinn einer Zermelo-Fraenkelschen Mengentheorie

Dass dies bisher konsequent für keines der vier mathematischen Teilgebiete der Semiotik durchgeführt wurde, ist umso erstaunlicher, als eine sehr gute

Zusammstellung einander korrespondierender Begriffe sich bereits in der StuttgarterDissertation von Peter Beckmann findet (1973/74, S. 45):

BOOLEsche Algebra B	Ereignisalgebra EA	Potenzmenge P(M)
1. Elemente $a_1, a_2, \ldots, a_n$	1. Ereignisse $E_1, E_2, \ldots, E_n$	1. Teilmengen $A_1, A_2, \ldots, A_n$
2. Menge A_t der Atome $A_t = \{a'_1, \ldots, a'_m\}$ $(m \leq n)$	2. Menge E der elementaren Ereignisse $E = \{e_1, \ldots, e_m\}$ $(m \leq n)$	2. Einelementige Teilmengen der Grundmenge M: $\{m_1\}, \ldots, \{m_m\}$ $(m \leq n)$
3. $a_1 \sqcap a_2$	3. $E_1 \wedge E_2$ (das Ereignis E_1 <u>und</u> E_2)	3. $A_1 \cap A_2$ (Durchschnitt)
4. $a_1 \sqcup a_2$	4. $E_1 \vee E_2$ (das Ereignis E_1 oder/und E_2)	4. $A_1 \cup A_2$ (Vereinigung)
5. $\overline{a}_1$ (kompl. Element zu a_1)	5. $\overline{E}_1$ (das zu E_1 entgegengesetzte Ereignis)	5. $\overline{A}_1$ (Komplementärmenge)
6. $a_1 \sqsubseteq a_2$ (a_2 umfaßt a_1)	6. $E_1 \Rightarrow E_2$ (E_1 zieht E_2 nach sich)	6. $A_1 \subseteq A_2$ (A_1 ist Teilmenge von A_2)
7. 0 (Nullelement)	7. U (unmögliches Ereignis)	7. $\emptyset$ (leere Menge)
8. 1 (Einselement)	8. S (sicheres Ereignis)	8. M

3. Eine σ-Algebra muss die folgenden drei Bedingungen erfüllen (aus: wikipedia)

Als σ-Algebra bezeichnet man in der Mathematik ein Mengensystem $\mathcal{A}$ mit $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$ ($\mathcal{P}$ bezeichnet die Potenzmenge), also eine Menge $\mathcal{A}$ von Teilmengen der Grundmenge Ω, das die folgenden Bedingungen erfüllt:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$ (Die Grundmenge Ω ist in $\mathcal{A}$ enthalten.)
2. $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$ (Wenn $\mathcal{A}$ eine Teilmenge A von Ω enthält, dann auch deren Komplement $A^c = \Omega \setminus A$.)
3. $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ (Wenn für jede natürliche Zahl n die Menge A_n in $\mathcal{A}$ ist, so ist auch die abzählbare Vereinigung aller A_n in $\mathcal{A}$.)

Wir können als einfach als Grundmenge Ω = {1, 2, 3} setzen, denn A = {{1}, {2}, {3}, {1, 2}, {2, 3}, {1, 3}, {1, 2, 3}, Ø}. Die Abgeschlossenheit des

„semiotischen Universums“ (Bense) wird dann einfach durch das Erfülltsein der Hüllenbedingungen eines einzuführenden σ-Operators definiert:

- $M \subseteq \sigma(M)$, also ist der σ-Operator extensiv.
- Gilt $M \subseteq N$, so ist auch $\sigma(M) \subseteq \sigma(N)$ (Monotonie bzw. Isotonie).
- Es ist $\sigma(\sigma(\mathcal{M})) = \sigma(\mathcal{M})$ (Idempotenz).

also flapsig gesagt: durch σ kommt man nicht aus dem Ereignisraum/ semiotischem Raum als Ereignisraus heraus. Das geht natürlich zusammen mit der bekannten Auffassung der Semiotik, dass Zeichenklasse und Realitätsthematik nur Subjekt- und Objektpol der semiotischen *einen* Repräsentation seien, wie es bei Bense heisst. D.h. auch die Realität ist durch das Zeichen eben nur vermittelt zugänglich, so wie das Zeichen selbst eine nur vermittelte Realität voraussetzt.

4. Der für eine beliebige Teilmenge einer Grundmenge definierbare σ-Operator

1. Für eine beliebige Teilmenge $\mathcal{M}$ der Potenzmenge $\mathcal{P}(\Omega)$ ist der σ-Operator definiert als

$$\sigma(M) = \bigcap_{\mathcal{A} \in \mathcal{F}(M)} \mathcal{A},$$

wobei

$$\mathcal{F}(M) = \{\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\Omega) \mid M \subseteq \mathcal{A}, \mathcal{A}\ \sigma\text{-Algebra}\}.$$

eignet sich somit für die Definition nicht nur eines rein formalen, sondern auch eines semiotischen **Massraumes**, wobei bei der semiotischen Grundmenge aus nur drei Elementen das sog. Banach-Tarski-Paradox natürlich nicht auftreten kann.

Hingegen kann man durch

Für eine Familie von Messräumen $((\Omega_i, \mathcal{A}_i))_{i \in I}$ gibt es eine kleinste σ-Algebra $\bigotimes_{i \in I} \mathcal{A}_i$ auf dem (kartesischen) Produkt $\prod_{i \in I} \Omega_i$ der Ω_i, sodass alle Projektionen auf die Ω_i messbar sind, es gilt folglich

$$\bigotimes_{i \in I} \Omega_i = \sigma(\pi_i, i \in I) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \sigma(\pi_i)\right) = \sigma\left(\bigcup_{i \in I} \pi_i^{-1}(\mathcal{A}_i)\right),$$

ein

$$\left(\prod_{i\in I}\Omega_i, \bigotimes_{i\in I}\mathcal{A}_i\right)$$

als Massraum definieren im Sinne eines messbaren Produktes der Familie $((\Omega_i, A_i)\}_{i\in I}$.

Seien z.B. $(\Omega_1, A_1) = (\{1, 2\}, \{\emptyset, \{1\}, \{2\}, \{1, 2\}\})$ und $(\Omega_2, A_2) = (\{2, 3\}, \{\emptyset, \{2, 3\}\})$ σ-Algebren, dann ist die zugehörige Produkt-σ-Algebra

$$\bigotimes_{i=1}^{2} A_1 = \{\emptyset, \{(1, 2), (1, 3), \{ \{(2, 1), (2, 2)\}, \{(1, 3), (2, 3), (1, 2), (2, 1)\}\}\}).$$

Bibliographie

Beckmann, Peter, Formale und funktionale Film- und Fernsehanalyse. Diss. Stuttgart 1973

Bense, Max, Die Unwahrscheinlichkeit des Ästhetischen. Baden-Baden 1979

Henze, Ernst, Einführung in die Masstheorie. 2. Aufl. Zürich 1985

11.3.2011